Statyba

ISSN: 1392-1525 (Print) (Online) Journal homepage: https://www.tandfonline.com/loi/tcem19

MATHEMATICAL PROGRAMMING APPLICATIONS PECULIARITIES IN SHAKEDOWN PROBLEM

E. Chraptovič & J. Atkočiūnas

To cite this article: E. Chraptovič & J. Atkočiūnas (2001) MATHEMATICAL PROGRAMMING APPLICATIONS PECULIARITIES IN SHAKEDOWN PROBLEM, Statyba, 7:2, 106-114, DOI: 10.1080/13921525.2001.10531711

To link to this article: https://doi.org/10.1080/13921525.2001.10531711

Published online: 30 Jul 2012.

ISSN 1392–1525. STATYBA – CIVIL ENGINEERING – 2001, VII tomas, Nr. 2

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ КОНСТРУКЦИЙ

Э. Храптович, Ю. Аткочюнас

Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса

1. Введение

Математика и механика всегда питали друг друга идеями. Наглядным примером тому является привлечение теории математического программирования к расчету упругопластических систем, подверженных действию повторно-переменного нагружения (ППН). Применение экстремальных энергетических принципов, теории двойственности математического программирования для формулировки и решения задач приспособляемости становится естественным с позиций как механики, так и математики. Теория математического программирования, широко распространившаяся как метод решения экстремальных задач, сопутствует исследованию задачи теории пластичности от ее постановки до окончательного решения. Однако и здесь, на наш взгляд, использованы далеко не все возможности.

При переходе от задач функционального пространства к инженерным задачам расчета (в том числе сформулированным в терминах теории математического программирования) зачастую аналитические методы решения классической математики недействительны или просто отсутствуют. Поэтому в настоящее время основным орудием решения инженерных задач являются численные методы математики. С распространением компьютерных технологий это заметно интенсифицировалось: переплетение методов физической дискретизации континуальных систем и методов вычислительной математики служит тому доказательством. Так получаются дискретные модели задач математического программирования, решением которых алгоритмическими методами определяется напряженно-деформированное состояние приспособившихся конструкций (задача анализа НДС) либо оптимальный проект самой конструкции. В обоих случаях пределы изменения ППН считаются заданными. Для практики актуальна и задача оптимизации пределов изменения повторно-переменного нагружения.

Приспособившаяся идеально упругопластическая конструкция удовлетворяет условиям прочности и является безопасной относительно циклически пластического разрушения. Однако эксплуатационные требования (например, жесткостные ограничения) при этом могут быть нарушены. Следовательно, математическая модель задачи оптимизации распределения параметров конструкции или пределов изменения нагружения должна включать в себя как прочностные, так и жесткостные условия-ограничения. Распределение перемещений упругопластической конструкции зависит от истории нагружения и при неизвестной истории ППН является не единственным, что коренным образом осложняет анализ НДС системы. Поэтому задача оптимизации конструкции в условиях приспособляемости представляет собой две как бы вложенных одна в другую задачи – основная задача оптимизации включает в себя задачу анализа НДС конструкции. Получается сложная проблема математического программирования: для каждой итерации решения основной задачи оптимизации должна решаться довольно сложная задача определения или оценки остаточных перемещений конструкции в случае ППН. Рассматриваемые задачи значительно сложнее задач оптимизации однократно нагружаемых конструкций и характеризуются повышенными требованиями к алгоритмам их решения.

К сожалению, применение математического программирования как средства численного решения задачи расчета конструкции зачастую тем и ограничивается. Не раскрываются возможности механической интерпретации критериев оптимальности применяемых алгоритмов. В настоящей работе эта брешь заполняется – приводится корректная механическая интерпретация критерия оптимальности алгоритма Розена [1]. Получаемые выводы распространяются на множество алгоритмов, так как условиями существования оптимального решения любой задачи выпуклого математического программирования вне зависимости от применяемого конкретного алгоритма решения являются условия Куна-Таккера [1]. Все же в настоящей статье условия Куна-Таккера исследуются в контексте алгоритма Розена. Для задачи, сформулированной с привлечением принципа Кастильяно, условия Куна-Таккера являются уравнениями совместности деформаций. В случае упруго-пластических систем – это уравнения совместности остаточных деформаций. В работе выясняется роль матрицы проектирования при построении упомянутых уравнений совместности. Доказывается, что для задач предельного равновесия условия Куна-Таккера включают в себя зависимости ассоциированного закона пластического течения. Более того, условия Куна-Таккера совместно с ограничениями исходной задачи расчета представляют собой полную систему зависимостей теории приспособляющихся систем.

Приводимая в настоящей статье математическая и механическая интерпретация условий Куна-Таккера позволяет отказаться от прямого решения двойственной задачи математического программирования. Тогда и в случае выпуклого нелинейного программирования сразу (аналогично известному симплекс-методу в линейном программировании) определяются значения двойственных переменных. Это облегчает решение задач оптимизации конструкций в условиях приспособляемости.

2. Физическая интерпретация критерия оптимальности алгоритма Розена

Задача расчета упругопластических конструкций при ППН в терминах выпуклого нелинейного математического программирования записывается так:

найти

$$\min\left\{\mathscr{F}(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T[D]\mathbf{x}\;\middle|\;\mathbf{x}\in\mathscr{L}\right\}, \qquad (1)$$

где допустимая область изменения переменных $\mathbf{x}$: $\mathscr{L}=\left\{\mathbf{x}\mid\varphi_i\,\mathbf{x}\ge 0\ \text{ для всех }\ i=1,2,\ldots,m\right\}$.

В частном случае функция цели или ограничения здесь могут быть линейными. Вектор $\mathbf{x}^*$, удовлетворяющий ограничениям задачи и минимизирующий функцию цели, называется оптимальным решением задачи (1). В связи с выпуклостью функций $\varphi_i(\mathbf{x})\ge 0$ и строго положительной определенностью матрицы $[D]$ (обычно это матрица податливости конструкции) оптимальное решение $\mathbf{x}^*$ обеспечивает глобальный минимум функции цели в допустимой области решений $\mathscr{L}$.

Среди множества алгоритмов решения задач выпуклого математического программирования выделяется алгоритм проектируемых градиентов Розена [1]. Метод Розена состоит в том, что градиент функции цели проектируется на границу допустимой области $\mathscr{L}$, и движение осуществляется по направлению не градиента (что характерно для градиентных методов), а проекции градиента. Если в основу решения задачи (1) положен алгоритм проектируемых градиентов Розена [1], то вектор $\mathbf{x}^*$ удовлетворяет следующему критерию оптимальности:

$$\left\{[I]-\left[\nabla\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)\right]^T\left(\left[\nabla\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)\right]\left[\nabla\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)\right]^T\right)^{-1}\left[\nabla\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)\right]\right\}\cdot\nabla\mathscr{F}\left(\mathbf{x}^*\right)=\mathbf{0}, \qquad (2)$$

$$\left(\left[\nabla\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)\right]\left[\nabla\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)\right]^T\right)^{-1}\left[\nabla\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)\right]\nabla\mathscr{F}\left(\mathbf{x}^*\right)\ge\mathbf{0}. \qquad (3)$$

Здесь $\nabla\mathscr{F}\left(\mathbf{x}^*\right)$, $\nabla\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)$ – градиенты функций цели $\mathscr{F}(\mathbf{x})$ и активных (удовлетворяемых в качестве равенств) ограничений $\varphi_i(\mathbf{x})=0$ $(i\le 1,2,\ldots,m,\ i\in I)$ задачи (1). Формула (2) и определяет проекцию градиента функции цели $\nabla\mathscr{F}\left(\mathbf{x}^*\right)$ на границу допустимой области $\mathscr{L}$.

Для физической интерпретации критерия оптимальности (2)–(3) следует обратиться к условиям Куна-Таккера [1]. Эти условия не зависят от применяемого конкретного алгоритма для решения задачи (1). Поэтому выводы, которые приводятся в настоящей работе, имеют общемеханическое значение для упругопластических систем (в наших работах [2], [3] эти условия рассмотрены в несколько ином аспекте). Для выпуклых функций условия Куна-Таккера являются условиями глобального решения исходной задачи (1) и гласят [1]: $\mathbf{x}^*$ является оптимальным решением исходной задачи, если можно найти такие числа $\lambda_i \ (i=1,2,...,m)$, при которых

$$\nabla\mathscr{F}\left(\mathbf{x}^*\right)-\left[\nabla\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)\right]^T\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}, \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)=0, \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{0}. \qquad (6)$$

В формулах (4)–(6) используется матрица градиентов всех ограничений $\varphi_i\left(\mathbf{x}^*\right)\geq 0 \quad (i=1,2,...,m,\ i\in I)$, поэтому нулевые составляющие вектора $\boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{0}$ определяются с привлечением условий о дополняющей нежесткости (5)–(6). Как известно, в условиях Куна-Таккера (4)–(6) составляющими вектора $\boldsymbol{\lambda}$ являются множители Лагранжа. Сравнением зависимостей (2) и (4) нами определено, что при оптимальном решении $\mathbf{x}^*$ условия (3) имеют физический смысл множителей Лагранжа для задачи (1):

$$\boldsymbol{\lambda}=\left(\left[\nabla\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)\right]\left[\nabla\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)\right]^T\right)^{-1}\left[\nabla\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)\right]\nabla\mathscr{F}\left(\mathbf{x}^*\right),$$

$$\boldsymbol{\lambda}\ \geq\mathbf{0}. \qquad (7)$$

Эта особенность алгоритма Розена позволяет в нелинейном программировании отказаться от прямого решения задачи, двойственной задаче (1). С привлечением векторов $\mathbf{x}^*$ и множителей $\boldsymbol{\lambda}$ получаются переменные двойственной задачи:

$$\mathbf{y}_1=\nabla\mathscr{F}\left(\mathbf{x}^*\right)=[D]\mathbf{x}^*,$$

$$\mathbf{y}_2=\left[\frac{\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)}{\partial\mathbf{x}}\right]^T\boldsymbol{\lambda}=\left[\nabla\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)\right]^T\boldsymbol{\lambda}$$

и

$$\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2=\mathbf{0}, \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T\varphi\left(\mathbf{x}^*\right)=0, \qquad (9)$$

$$\boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{0}. \qquad (10)$$

В случае, когда в ограничениях задачи (1) в явном виде отсутствуют условия-равенства, зависимость (8) превращается в $\mathbf{y}=\mathbf{y}_1=\mathbf{y}_2$. В общем случае $\mathbf{y}_2$ представляет собой сумму нескольких переменных. В теории математического программирования условия (2) с привлечением матрицы проектирования

$$[P]=[I]-\left[\nabla\varphi\left(x^*\right)\right]^T\left(\left[\nabla\varphi\left(x^*\right)\right]\left[\nabla\varphi\left(x^*\right)\right]^T\right)^{-1}\left[\nabla\varphi\left(x^*\right)\right] \qquad (11)$$

записываются так:

$$[P]\nabla\mathscr{F}\left(\mathbf{x}^*\right)=\mathbf{0}. \qquad (12)$$

В работе [2] показано, что условия Куна-Таккера (4)–(6) при расчете упругопластических систем являются уравнениями совместности остаточных деформаций. Такой же смысл имеет и критерий оптимальности (2)–(3): условия (12) представляют собой основную группу уравнений совместности. Тогда физическая интерпретация критерия оптимальности для задач расчета упругопластических приспособляющихся конструкций такова: действительному распределению остаточных усилий $\mathbf{S}_r^*$ отвечают удовлетворенные уравнения совместности деформаций. Для циклически пластического разрушения уравнения совместности (4)–(6) включают в себя и зависимости ассоциированного закона пластического течения. Более детально это рассматривается в следующем разделе.

3. О взаимосвязи закона пластического течения и условий Куна-Таккера

Статически допустимые остаточные усилия $\mathbf{S}_r$ удовлетворяют уравнениям равновесия $[A]\mathbf{S}_r=\mathbf{0}$ и нелинейным условиям текучести $\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_e(t)+\mathbf{S}_r\right)\geq\mathbf{0}$; здесь $\mathbf{C}$ – вектор характеристик пластичности. Например, для изгибаемых пластинок $C_i=\left(M_{0i}\right)^2$, здесь M_{0i} – предельное усилие, т. е. предельный момент в i-м расчетном сечении ($i\in I$). Время t в условиях текучести исключается вводом экстремальных усилий $\mathbf{S}_{ej,\max}$, $\mathbf{S}_{ej,\min}$:

$\varphi_{j,\max}=\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{ej,\max}+\mathbf{S}_r\right)\geq\mathbf{0}$,

$\varphi_{j,\min}=\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{ej,\min}+\mathbf{S}_r\right)\geq\mathbf{0}$ для всех $j\in J$. Экстремальные упругие усилия $\mathbf{S}_{ej,\max}$, $\mathbf{S}_{ej,\min}$ являются линейными функциями не зависящих от времени пределов изменения ППН $\mathbf{F}_{inf}$, $\mathbf{F}_{sup}$ Векторы $\mathbf{S}_{ej,\max}$, $\mathbf{S}_{ej,\min}$ определяют все вершины годографа упругих усилий $\mathbf{S}_e(t)$. Симметричные пары вершин годографа и индексируются через j, их множество – J. Для простоты записи вводятся обозначения статически допустимых усилий $\mathbf{S}_{j,\max} = \mathbf{S}_{ej,\max} + \mathbf{S}_r$, $\mathbf{S}_{j,\min} = \mathbf{S}_{ej,\min} + \mathbf{S}_r$.

Пусть $\widetilde{\mathbf{S}}_{0i}$ – вектор усилий на поверхности текучести $C_i = f_i\left(\widetilde{\mathbf{S}}_{0i}\right)$, соответствующий отличным от нуля скоростям пластических деформаций $\dot{\mathbf{\Theta}}_{pi}$. С другой стороны, $(M_{0i})^2 = f_i\left(\widetilde{\mathbf{S}}_{0i}\right)$. Для конструкции в целом вектор скоростей пластических деформаций обозначается $\dot{\mathbf{\Theta}}_p$, а вектор усилий на поверхности текучести – $\widetilde{\mathbf{S}}_0$, т. е. $\mathbf{f}\left(\widetilde{\mathbf{S}}_0\right) = \mathbf{C}$.

Согласно постулату Друккера [4] в i-м расчетном сечении $\dot{\mathbf{\Theta}}_{pi}^T\left(\widetilde{\mathbf{S}}_{0i} - \mathbf{S}_{ij,\max}\right) \geq 0$, $\dot{\mathbf{\Theta}}_{pi}^T\left(\widetilde{\mathbf{S}}_{0i} - \mathbf{S}_{ij,\min}\right) \geq 0$, $i \in I$, $j \in J$. Распределение усилий при действии предельных нагрузок существенно единственно в тех областях конструкции, где отличны от нуля скорости пластических деформаций. Тогда действительно равенство единственности усилий в состоянии разрушения [4]:

$$\dot{\mathbf{\Theta}}_p^T\left(\widetilde{\mathbf{S}}_0 - \mathbf{S}_{j,\max}\right) = 0, \quad \dot{\mathbf{\Theta}}_p^T\left(\widetilde{\mathbf{S}}_0 - \mathbf{S}_{j,\min}\right) = 0$$

или

$$\dot{\mathbf{\Theta}}_p^T\left(\widetilde{\mathbf{S}}_0 - \mathbf{S}_{j,\substack{\max\\ \min}}\right) = 0.$$

Отсюда, следуя зависимостям вышеупомянутого постулата Друккера, в момент циклически-пластического разрушения $\mathbf{S}_e^* + \mathbf{S}_r^* = \widetilde{\mathbf{S}}_0$, т. е. для действительных остаточных усилий $\mathbf{S}_r^*$ из всех вершин годографа упругих усилий для сечения лишь одна участвует при реализации механизма пластического разрушения. При этом для отдельных сечений индекс J может быть разным. Таким образом, в конце процесса нагружения из всех векторов $\mathbf{S}_{ej,\max}$, $\mathbf{S}_{ej,\min}$ формируется вектор упругих усилий $\mathbf{S}_e^*$.

Математическая модель задачи оптимизации конструкции в статической формулировке, исходя из условий ее циклически-пластического разрушения, строится на основе принципа минимума скорости диссипации энергии $\dot{\mathbf{\Theta}}_p^T \widetilde{\mathbf{S}}_0$. В выражение скорости диссипации энергии входят взаимозависимые переменные $\dot{\mathbf{\Theta}}_p$, $\widetilde{\mathbf{S}}_0$. Ограничения на $\dot{\mathbf{\Theta}}_p$ в статической формулировке задачи реализуются через равенство $\mathbf{S}_e^* + \mathbf{S}_r^* = \widetilde{\mathbf{S}}_0$ (или просто $\mathbf{S}^* = \widetilde{\mathbf{S}}_0$). Лишь в этом случае косвенным образом соблюдается закон ассоциированного пластического течения. Это выявляется из анализа математической модели задачи оптимизации при циклически-пластическом разрушении:

найти:

$$\min \dot{\mathbf{\Theta}}_p^T \widetilde{\mathbf{S}}_0 \tag{13}$$

при условиях

$$[A]\mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \tag{14}$$

$$\varphi_{j,\max} = \mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{ej,\max} + \mathbf{S}_r\right) \geq \mathbf{0},$$

$$\varphi_{j,\min} = \mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{ej,\min} + \mathbf{S}_r\right) \geq \mathbf{0} \quad \text{для всех} \quad j \in J, \tag{15}$$

здесь $$\mathbf{C} = \mathbf{f}\left(\widetilde{\mathbf{S}}_0\right), \quad \mathbf{S}_e^* + \mathbf{S}_r^* = \widetilde{\mathbf{S}}_0. \tag{16}$$

В представленной выше формулировке задачи (13)–(16) неизвестными выступают $\widetilde{\mathbf{S}}_0$, $\mathbf{S}_r$.

Далее выявляется взаимосвязь между ассоциированным законом пластического течения и критерием оптимальности (2)–(3). Условия Куна-Таккера (4)–(6) для оптимального решения $\widetilde{\mathbf{S}}_0^*$, $\mathbf{S}_r^*$ задачи (13)–(16) принимают вид:

$$\dot{\mathbf{\Theta}}_p - \sum_j \left[\frac{\partial \varphi\left(\mathbf{S}_{j,\max}^*\right)}{\partial \widetilde{\mathbf{S}}_0}\right]^T \boldsymbol{\lambda}_{j,\max} - \sum_j \left[\frac{\partial \varphi\left(\mathbf{S}_{j,\min}^*\right)}{\partial \widetilde{\mathbf{S}}_0}\right]^T \boldsymbol{\lambda}_{j,\min} = \mathbf{0}, \tag{17}$$

$$-\sum_j \left[\frac{\partial \varphi\left(\mathbf{S}_{j,\max}^*\right)}{\partial \mathbf{S}_r}\right]^T \boldsymbol{\lambda}_{j,\max} - \sum_j \left[\frac{\partial \varphi\left(\mathbf{S}_{j,\min}^*\right)}{\partial \mathbf{S}_r}\right]^T \boldsymbol{\lambda}_{j,\min} + [A]^T \dot{\mathbf{u}}_r = \mathbf{0}, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j,\max}^T \varphi\left(\mathbf{S}_{j,\max}^*\right) = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}_{j,\min}^T \varphi\left(\mathbf{S}_{j,\min}^*\right) = 0, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j,\max} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{j,\min} \geq \mathbf{0}. \tag{20}$$

Группы зависимостей (17) и (18) представляют собой равенства (8): $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$. Условия о дополняющей нежесткости (19)–(20) предоставляют возможность определить форму разрушения при ППН – прогрессирующее ли это разрушение или разрушение из-за переменной пластичности. Этому и служит выделение симметричных пар вершин годографа упругих усилий j, $j \in J$. В случае прогрессирующего разрушения условия о дополняющей нежесткости удовлетворяются лишь для одной вершины годографа упругих усилий i-го сечения (соответствующий множитель Лагранжа в этом случае $\lambda_i > 0$). В дальнейшем и рассматривается прогрессирующее разрушение конструкции. При однородной функции текучести

$$\varphi_i^* = C_i^* - f_i\left(\mathbf{S}_i^*\right) = 0, \quad i \in I, \qquad (21)$$

до постоянного множителя действительны равенства:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{0i}^T \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tilde{\mathbf{S}}_{0i}} = C_i, \quad \mathbf{S}_i^{*T} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{S}_{ri}} = C_i.$$

Тогда с учетом того, что при циклическом пластическом разрушении

$$\tilde{\mathbf{S}}_{0i} = \mathbf{S}_i^* \;\text{ и }\; \lambda_i > 0, \qquad (22)$$

получается

$$\frac{\partial \varphi_i^*\left(\mathbf{S}_i^*\right)}{\partial \tilde{\mathbf{S}}_{0i}} \lambda_i = \frac{\partial \varphi_i^*\left(\mathbf{S}_i^*\right)}{\partial \mathbf{S}_{ri}} \lambda_i. \qquad (23)$$

Как следствие этого формула для определения скоростей пластических деформаций (17) принимает вид:

$$\dot{\mathbf{\Theta}}_{pi} = \frac{\partial \varphi_i^*\left(\mathbf{S}_i^*\right)}{\partial \mathbf{S}_{ri}} \lambda_i, \quad i \in I. \qquad (24)$$

Зависимости (24) совместно с условиями о дополняющей нежесткости (19)–(20) выражают закон ассоциированного пластического течения [4]. Теперь, при помощи формулы (24) выяснив смысл производных

$$\left[\frac{\partial \varphi\left(\mathbf{S}_{j,\max}\right)}{\partial \mathbf{S}_r}\right]^T \boldsymbol{\lambda}_{j,\max}, \quad \left[\frac{\partial \varphi\left(\mathbf{S}_{j,\min}\right)}{\partial \mathbf{S}_r}\right]^T \boldsymbol{\lambda}_{j,\min}, \; j \in J,$$

можно утверждать, что скорости пластических деформаций выражаются так:

$$\dot{\mathbf{\Theta}}_p = \sum_j \left[\frac{\partial \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{ej,\max} + \mathbf{S}_r^*\right)}{\partial \mathbf{S}_r}\right]^T \boldsymbol{\lambda}_{j,\max} + \sum_j \left[\frac{\partial \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{ej,\min} + \mathbf{S}_r^*\right)}{\partial \mathbf{S}_r}\right]^T \boldsymbol{\lambda}_{j,\min}, \quad j \in J. \qquad (25)$$

Следовательно, зависимости (18)–(20) в целом выражают геометрическую совместность скоростей пластических деформаций и остаточных перемещений $\dot{\mathbf{u}}_r$:

$$\dot{\mathbf{\Theta}}_p = [A]^T \dot{\mathbf{u}}_r. \qquad (26)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j,\max}^T \varphi\left(\mathbf{S}_{j,\max}^*\right) = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}_{j,\min}^T \varphi\left(\mathbf{S}_{j,\min}^*\right) = 0,$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j,\max} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{j,\min} \geq \mathbf{0}.$$

Вектор скоростей остаточных перемещений $\dot{\mathbf{u}}_r$ определяется по формуле

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \left([A']^T\right)^{-1} \dot{\mathbf{\Theta}}'_p.$$

Здесь $[A']^T$ – подматрица матрицы $[A]^T$, $\dot{\mathbf{\Theta}}'_p$ – соответствующий этой подматрице подвектор от $\dot{\mathbf{\Theta}}_p$. В математической модели задачи (13)–(16) можно заранее исключить условия равновесия $[A]\mathbf{S}_r = \mathbf{0}$. Тогда зависимости (18), (26) прямым образом превратились бы в условия совместности для скоростей пластических деформаций

$$[B]\dot{\mathbf{\Theta}}_p = \mathbf{0}. \qquad (27)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j,\max}^T \varphi\left(\mathbf{S}_{j,\max}^*\right) = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}_{j,\min}^T \varphi\left(\mathbf{S}_{j,\min}^*\right) = 0,$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j,\max} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{j,\min} \geq \mathbf{0}.$$

Здесь

$$[B] = \left[[A'']^T \left([A']^T\right)^{-1}, -[\mathrm{I}]\right].$$

Еще о функции цели (13) задачи оптимизации (13)–(16). Используя зависимость (24), функция цели (13) до постоянного множителя сводится к виду:

$$\min \; \dot{\mathbf{\Theta}}_p^T \tilde{\mathbf{S}}_0 = \min \; \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}.$$

Так как множители $\boldsymbol{\lambda}$ не входят в условия-ограничения задачи (13)–(16), то принимается $\boldsymbol{\Lambda} \equiv \boldsymbol{\lambda}$. Задача оптимизации параметров конструкции при пластическом разрушении сводится к виду:
найти

$$\min \; \boldsymbol{\Lambda}^T \mathbf{C} \qquad (28)$$

при условиях (14)–(15)

$$[A]\mathbf{S}_r = \mathbf{0},$$

$$\varphi_{j,\max} = \mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{ej,\max} + \mathbf{S}_r\right) \geq \mathbf{0},$$

$$\varphi_{j,\min} = \mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{ej,\min} + \mathbf{S}_r\right) \geq \mathbf{0} \quad \text{для всех} \quad j \in J.$$

Лишь при наличии функции цели в представленном виде (28) при решении задачи соблюдаются требования ассоциированного закона пластического течения.

Если в качестве условий текучести принять линеаризованное условие текучести Треска, задача (28) превратится в задачу линейного программирования, решением которой сразу определяются и двойственные переменные $\dot{\mathbf{\Theta}}_p$, $\dot{\mathbf{u}}_r$. В этом случае не требуется решения двойственной задачи математического программирования. Однако линеаризация условий текучести приводит к необходимости записывать для расчетных сечений дискретной модели конструкции множество линейных ограничений. Этого недостатка лишено, например, нелинейное условие текучести Мизеса, часто применяемое при расчете упругопластических пластин. Однако прямое решение задачи оптимизации конструкции в кинематической формулировке при наличии нелинейных условий текучести довольно громоздко. Поэтому предлагаемая здесь методика прямого определения кинематических переменных задачи расчета упругопластических конструкций $\dot{\mathbf{\Theta}}_p$, $\dot{\mathbf{u}}_r$ при наличии нелинейных условий текучести приобретает весьма важное значение. Она полезна и при решении задач квадратичного математического программирования.

Вектор $\mathbf{S}_r^*$ представляет собой лишь одно из возможных распределений остаточных усилий в той части конструкции, где скорости пластических деформаций равны нулю. Иначе говоря, может существовать статически неопределимая часть системы. Для определения единственного $\mathbf{S}_r^*$ в этом случае требуется решение дополнительной задачи анализа НДС. Для статических переменных она формулируется на основе принципа минимума дополнительной энергии U. Обычно она решается для состояния приспособляемости конструкции: пластическое деформирование, возникшее на первых стадиях нагружения конструкции, в последующих циклах нагружения не возобновляется. Задача анализа для момента, предшествующего циклическому пластическому разрушению, и состояния приспособляемости строится на основе того же принципа минимума дополнительной энергии U.

4. Особенности формулировки задачи анализа конструкций в состоянии приспособляемости

Статическая формулировка задачи анализа идеально упругопластической конструкции в состоянии приспособляемости строится на основе принципа минимума дополнительной энергии для статически допустимых остаточных усилий $\mathbf{S}_r$:
найти

$$\min \ \frac{1}{2}\mathbf{S}_r^T[D]\mathbf{S}_r = U^* \tag{29}$$

при условиях

$$[A]\mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \tag{30}$$

$$\varphi_{j,\max} = \mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{ej,\max} + \mathbf{S}_r\right) \geq \mathbf{0}, \tag{31}$$

$$\varphi_{j,\min} = \mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{ej,\min} + \mathbf{S}_r\right) \geq \mathbf{0} \quad \text{для всех} \quad j \in J. \tag{32}$$

Условия Куна-Таккера для оптимального решения $\mathbf{S}_r^*$ задачи (29)–(32) принимают вид:

$$[D]\mathbf{S}_r^* - \sum_j \left[\nabla\mathbf{f}(\mathbf{S}_{ej,\max} + \mathbf{S}_r^*)\right]^T \boldsymbol{\lambda}_{j,\max} -$$

$$- \sum_j \left[\nabla\mathbf{f}(\mathbf{S}_{ej,\min} + \mathbf{S}_r^*)\right]^T \boldsymbol{\lambda}_{j,\max} + [A]^T\mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \tag{33}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j,\max}^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}(\mathbf{S}_{e,\max} + \mathbf{S}_r^*)\right] = 0,$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j,\min}^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}(\mathbf{S}_{e,\min} + \mathbf{S}_r^*)\right] = 0, \tag{34}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j,\max} \geq \mathbf{0}, \ \boldsymbol{\lambda}_{j,\min} \geq \mathbf{0} \quad \text{для всех} \quad j \in J. \tag{35}$$

Полная система уравнений задачи приспособляемости, когда в качестве неизвестных выступают $\mathbf{S}_r$, $\mathbf{u}_r$, $\boldsymbol{\lambda}_{j,\max} \geq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\lambda}_{j,\min} \geq \mathbf{0}$, $j \in J$, получается из системы зависимостей (33)–(35) и (30)–(32):

$$[D]\mathbf{S}_r - \sum_j \left[\nabla\mathbf{f}(\mathbf{S}_{ej,\max} + \mathbf{S}_r)\right]^T \boldsymbol{\lambda}_{j,\max} -$$

$$- \sum_j \left[\nabla\mathbf{f}(\mathbf{S}_{ej,\min} + \mathbf{S}_r)\right]^T \boldsymbol{\lambda}_{j,\min} + [A]^T\mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j,\max}^T\left[\mathbf{C} - \mathbf{f}(\mathbf{S}_{e,\max} + \mathbf{S}_r)\right] = 0,$$

$$\lambda^T_{j,\min}\left[\mathbf{C}-\mathbf{f}(\mathbf{S}_{e,\min}+\mathbf{S}_r)\right]=0. \qquad (37)$$

$$\lambda_{j,\max}\geq\mathbf{0},\ \lambda_{j,\min}\geq\mathbf{0}. \qquad (38)$$

$$[A]\mathbf{S}_r=\mathbf{0}, \qquad (39)$$

$$\varphi_{j,\max}=\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{ej,\max}+\mathbf{S}_r\right)\geq\mathbf{0}, \qquad (40)$$

$$\varphi_{j,\min}=\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{ej,\min}+\mathbf{S}_r\right)\geq\mathbf{0}\ \text{для всех}\ \ j\in J. \ (41)$$

Часто исследователи полную систему уравнений (36)–(41) получают из ограничений задач анализа в статической и кинематической формулировках с "добавлением" к ним условий о дополняющей нежесткости. Решением системы (36)–(41) определяются $\mathbf{S}^*_r$, $\mathbf{u}^*_r$, $\lambda^*_{j,\max}\geq\mathbf{0}$, $\lambda^*_{j,\min}\geq\mathbf{0}$, $j\in J$.

Условия Куна-Таккера (33)–(35) могут быть сведены к виду:

$$[B]\Theta_p=[B_r]\mathbf{S}^*_r. \qquad (42)$$

Здесь пластические деформации

$$\Theta_p=\sum_j\left[\nabla\varphi(\mathbf{S}^*_{j,\max})\right]^T\lambda_{j,\max}+\sum_j\left[\nabla\mathbf{f}(\mathbf{S}^*_{j,\min})\right]^T\lambda_{j,\min},$$

$$\lambda^T_{j,\max}\,\varphi\left(\mathbf{S}^*_{j,\max}\right)=0,\ \ \lambda^T_{j,\min}\,\varphi\left(\mathbf{S}^*_{j,\min}\right)=0,$$

$$\lambda_{j,\max}\geq\mathbf{0}\ ,\ \ \lambda_{j,\min}\geq\mathbf{0},\ \ j\in J.$$

Матрица $[B_r]$ имеет следующую структуру:

$$[B_r]=-[A'']^T\left([A']^T\right)^{-1}[D']+[D'']. \qquad (43)$$

Уравнения совместности деформаций с использованием понятия фиктивной системы [2] входят в математическую модель задачи определения пределов изменения остаточных перемещений:
найти

$$\begin{matrix}\max\\\min\end{matrix}\mathbf{H}^*_i\lambda=\begin{bmatrix}u^*_{ri,sup}\\u^*_{ri,inf}\end{bmatrix},\ \ i=1,2,\ldots,\ r \qquad (44)$$

при условиях

$$\left[B^*_\lambda\right]\lambda=[B_r]\mathbf{S}^*_r\ ,\quad \lambda\geq\mathbf{0},$$

$$\lambda^T\tilde{\mathbf{C}}\leq\tilde{D}_{\max}. \qquad (45)$$

Здесь $\left[H^*\right]$ – матрица влияния для остаточных перемещений. Фиктивная система получается вводом нового вектора пластических констант $\tilde{C}$, при котором для каждого расчетного сечения i одно условие текучести является активным, т. е. $\varphi^*_i=\tilde{C}_i-f_i\ (\mathbf{S}^*_{ri}+\mathbf{S}^*_{ei})=0$. В этой формуле вектор $\mathbf{S}^*_r$ является оптимальным решением задачи (29)–(32). Для этой фиктивной системы и определяется максимальное значение диссипации энергии состояния приспособляемости $\tilde{D}_{\max}$. В таком случае ясно, что матрица $\left[B^*_\lambda\right]=[B]\left[\nabla\varphi^*\right]^T$. Математическая модель задачи (44)–(45) определяет такие пределы изменения остаточных перемещений $\mathbf{u}^*_{r,inf}$, $\mathbf{u}^*_{r,sup}$, когда $\mathbf{u}^*_{r,inf}\leq\mathbf{u}_r(t)\leq\mathbf{u}^*_{r,sup}$. Перемещениями фиктивной системы $\mathbf{u}^*_{r,inf}$, $\mathbf{u}^*_{r,sup}$ "огибаются" перемещения $\mathbf{u}_r(t)$ действительной (исходной) конструкции при действии повторно-переменного нагружения. Математическая модель задачи (44)–(45) учитывает и возможную разгрузку сечений упругопластической конструкции.

5. Новая математическая модель задачи оптимизации конструкции в условиях приспособляемости

В случае нелинейных условий текучести математическая модель задач оптимизации параметров конструкции в условиях приспособляемости принимает вид:
найти

$$\min\left\{\mathbf{L}^T\mathbf{C}+\sum_j\lambda^T_{j,\max}\left[\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{e,\max}+\mathbf{S}_r\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_j\lambda^T_{j,\min}\left[\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{e,\min}+\mathbf{S}_r\right)\right]\right\} \qquad (46)$$

при условиях

$$[D]\mathbf{S}_r-\sum_j\left[\nabla\mathbf{f}(\mathbf{S}_{ej,max}+\mathbf{S}_r)\right]^T\lambda_{j,\max}-$$
$$-\sum_j\left[\nabla\mathbf{f}(\mathbf{S}_{ej,\min}+\mathbf{S}_r)\right]^T\lambda_{j,\min}+[A]^T\mathbf{u}_r=\mathbf{0}, \qquad (47)$$

$$\lambda_{j,\max}\geq\mathbf{0},\ \lambda_{j,\min}\geq\mathbf{0}, \qquad (48)$$

$$[A]\mathbf{S}_r=\mathbf{0}, \qquad (49)$$

$$\varphi_{j,\max}=\mathbf{C}-\mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{ej,\max}+\mathbf{S}_r\right)\geq\mathbf{0}, \qquad (50)$$

$$\varphi_{j,\min} = \mathbf{C} - \mathbf{f}\left(\mathbf{S}_{ej,\min} + \mathbf{S}_r\right) \geq \mathbf{0} \quad \text{для всех} \quad j \in J, \quad (51)$$

$$\mathbf{u}_{r,\min} \leq \mathbf{u}_r \leq \mathbf{u}_{r,\max}. \quad (52)$$

При построении математической модели (46)–(52) использована идея ([5]), согласно которой условия о дополняющей нежесткости могут быть подключены именно к функции цели (46). Неизвестными в задаче (46)–(52) выступают $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}_r$, $\mathbf{u}_r$, $\lambda_{j,\min}$, $\lambda_{j,\max}$, $j \in J$.

Условия (52) в математической модели (46)–(52) выявляют одну из возможных историй нагружения $\mathbf{F}(t)$ ($\mathbf{F}_{\inf} \leq \mathbf{F}(t) \leq \mathbf{F}_{\sup}$), при которых условия жесткости не нарушены. Однако это не означает, что не существуют истории нагружения, для которых условия (52) нарушаются. Тогда для каждой итерации решения основной задачи оптимизации (46)–(51) должна решаться задача оценки пределов изменения остаточных перемещений (44)–(45):

$$\mathbf{u}_{r,\min} \leq \mathbf{u}^*_{r,inf}, \quad \mathbf{u}^*_{r,sup} \leq \mathbf{u}_{r,\max}.$$

Эта задача как бы вложена в основную задачу оптимизации параметров конструкции в условиях приспособляемости.

6. Выводы

Задачи расчета и оптимизации упругопластических конструкций при повторно-переменном нагружении могут быть сформулированы в терминах теории математического программирования. Задачи могут быть сформулированы либо в статических, либо в кинематических переменных. Условиями глобального решения любой исходной задачи являются условия Куна-Таккера.

Критерии оптимальности алгоритмов, применяемых для решения нелинейных задач расчета и оптимизации, сформулированных в терминах теории математического программирования, по своей сути являются упомянутыми условиями Куна-Таккера. Показано, что условия критерия оптимальности алгоритма Розена являются зависимостями ассоциированного закона пластического течения и уравнения совместности для скоростей пластических деформаций (в случае циклически-пластического разрушения). Для задач расчета и отимизации в условиях приспособляемости критерий Розена выражает уравнения метода сил или метода перемещений в строительной механике. Это зависит от того, на основе каких экстремальных принципов – принципа Кастильяно или принципа Лагранжа – построена математическая модель исследуемой задачи. Упомянутые условия совместно с ограничениями исходной задачи представляют собой полную систему зависимостей теории пластичности.

Механическая интерпретация условий критерия оптимальности Розена служит более гибкому учету условий жесткости в процессе решения задач оптимизации приспосабляющихся конструкций. Выявлена взаимосвязь между выкладками теории математического программирования и постановками задач приспосабляющихся конструкций.

Литература

1. Mokhtar S. Bazaraa, C. M. Shetty. Nonlinear Programming Theory and Algorithms. New York, Chichester, Brisbane, Toronto: John Wiley, 1979. 283 p.
2. J. Atkočiūnas. Compatibility equations of strains for degenerate shakedown problems // Computers & Structures, 63, 2. 1997, p. 277–282.
3. Э. Храптович, Ю. Аткочюнас. Роль условий Куна-Таккера в формулировке уравнений теории упругости в напряжениях // Statyba (Строительство), Vol VI, No 2. Vilnius: Technika, 2000, p. 104–112.
4. W. Koiter. General theorems for elastic-plastic solids // Progress in Solid Mechanics. Amsterdam: North-Holland, 1960, p. 165–221.
5. С. Каланта. Новые постановки задач оптимизации упруго-пластических стержневых систем при ограниченных перемещениях // Mechanika, Nr. 5(20). Kaunas: Technologija, 1999, p. 9–16.

Įteikta 2001 02 19

MATEMATINIO PROGRAMAVIMO TAIKYMO KONSTRUKCIJŲ PRISITAIKYMO UŽDAVINIUOSE YPATUMAI

E. Chraptovič, J. Atkočiūnas

Santrauka

Matematinio programavimo teorija, plačiai paplitusi kaip ekstreminių uždavinių sprendimo metodas, padeda formuluoti plastiškumo teorijos uždavinius ir juos išspręsti. Tačiau dar nėra atskleistos visos jos galimybės. Dažnai apsiribojama matematiniu programavimu, kaip priemone gauti uždavinio sprendimo rezultatą. Neatskleidžiamos mechaninės taikomų algoritmų optimalumo kriterijų interpretacijos galimybės.

Matematinio programavimo uždavinio globalinis sprendinys egzistuoja, jeigu tenkinamos nuo konkretaus uždavinio

sprendimo nepriklausančios algoritmo Kuno ir Takerio sąlygos. Šiame straipsnyje parodomas šių sąlygų ir Rozeno algoritmo optimalumo kriterijaus identiškumas. Išryškintas taikant gradientinius metodus naudojamos projekcinės matricos vaidmuo formuojant deformacijų darnos lygtis (Kuno ir Takerio sąlygos yra plastiškumo teorijos liekamųjų deformacijų darnos lygtys). Straipsnyje parodyta, kad ribinės pusiausvyros uždaviniuose Rozeno algoritmo optimalumo kriterijus apima ir asociatyvaus tekėjimo dėsnio priklausomybes. Kuno ir Takerio sąlygos kartu su pradinio matematinio programavimo uždavinio sąlygomis-apribojimais sudaro pilną prisitaikiusių konstrukcijų skaičiavimo uždavinio lygčių sistemą.

Korektiška matematinė ir mechaninė optimalumo kriterijaus interpretacija leidžia atsisakyti dualaus matematinio programavimo uždavinio sprendimo. Atskleistieji matematinio programavimo taikymo ypatumai palengvina prisitaikančių konstrukcijų optimizacijos uždavinių sprendimą.

MATHEMATICAL PROGRAMMING APPLICATIONS PECULIARITIES IN SHAKEDOWN PROBLEM

E. Chraptovič, J. Atkočiūnas

Summary

The theory of mathematical programming widely spread as a method of a solution of extreme problems. It accompanies the study of plastic theory problem from its posing up to final solution. However, here again from our point of view not all possibilities are realized.

Unfortunately, the use of mathematical programming as an instrument of a numerical solution for structural analysis frequently is also restricted by that. The possibilities of mechanical interpretation of optimality criteria of applied algorithms are not uncovered.

The global solution of the problem of mathematical programming exists, if Kuhn-Tucker conditions are satisfied. These conditions do not depend on the applied algorithm of a problem solution. The identity of Kuhn-Tucker conditions with a optimality criteria of Rosen algorithm is finding out in this research. The role of a design matrix for the creating of strain compatibility equations is clarified. The Kuhn-Tucker conditions mean the residual strain compatibility equations in analysis of elastic-plastic systems. It is proved in the article that for problems of limiting equilibrium the Kuhn-Tucker conditions include the dependences of the associated law of plastic flow. The Kuhn-Tucker conditions together with limitations of a source problem of account represent a complete set of dependences of the theory of shakedown. The correct mathematical and mechanical interpretation of the Kuhn-Tucker conditions allows to refuse a direct solution of a dual problem of mathematical programming. It makes easier the solution of optimization problems of structures at shakedown.

Ela CHRAPTOVIČ. Doctoral student. Dept of Structural Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University (VGTU). Saulėtekio al. 11, LT-2040 Vilnius, Lithuania. E-mail: Ela.Chraptovic@st.vtu.lt

Civil engineer (1995). MSc of Civil Engineering (1997). Research interests: structural mechanics, optimization of elastic-plastic structures.

Juozas ATKOČIŪNAS. Doctor Habil, Professor. Head of the Dept of Structural Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University (VGTU). Saulėtekio al. 11, LT-2040 Vilnius, Lithuania. E-mail: Juozas.Atkociunas@st.vtu.lt

Civil engineer (1967). Dr Eng (structural mechanics, 1973). Dr Habil (mechanics, 1996). Research interests: structural and computational mechanics, applied mathematical programming, analysis and optimization of dissipative structures under repeated-variable loading.