НЕРАВЕНСТВА ТИПА ВИМАНА- ВАЛИРОНА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

П. В. ФИЛЕВИЧ

Львовский университет
Кафедра теории функций и теории вероятностей
290000 г. Львов, Университетская 1, Украина

Для целой функции

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \tag{1}$$

через $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$ и $\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n:n\geq 0\}$ обозначим соответственно ее максимум модуля и максимальный член.

Как утверждает классическая теорема Вимана–Валирона, при любом $\varepsilon>0$

$$M_f(r)\leq\mu_f(r)\ln^{1/2+\varepsilon}\mu_f(r) \tag{2}$$

для всех $r>1$ вне множества $E(\varepsilon)$ конечной логарифмической меры, т.е.

$$\ln-measE=\int_{E\cap(1,+\infty)}d(\ln r)<+\infty$$

В 1962 г. П. К. Розенблум [1], используя теоретико–вероятностные рассуждения, получил более гибкие соотношения между $M_f(r)$ и $\mu_f(r)$. В частности, при любом $\delta>0$

$$M_f(r)\leq\mu_f(r)\ln^{1/2}\mu_f(r)\ln^{1+\delta}\ln\mu_f(r) \tag{3}$$
$$r\in(1,+\infty)\setminus E(\delta),\ \ln-measE(\delta)<+\infty.$$

Пример функции $f(z)=e^z$, для которой

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M_f(r)}{\mu_f(r)\ln^{1/2}\mu_f(r)}=\sqrt{2\pi}$$

указывает, вообще говоря, на невозможность замены показателя $1/2$ в (2) и (3) меньшим числом. Поэтому естественным выглядит вопрос о типичности свойства функции $f(z)=e^z$ в классе всех целых функций (П. Леви [2]). Иными словами: сколько есть (скажем, в терминах меры) целых функций, для которых показатель в (2) и (3) нельзя заменить меньшим числом.

Для выяснения этого, а также ряда других вопросов Г. Штейнгауз [3], Д. Пойя [4] и П. Леви [2] предложили рассматривать случайные функции вида

$$f(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n Z_n(t)z^n, \tag{4}$$

где $Z=\{Z_n\}$ –последовательность случайных величин, заданных на вероятностном пространстве Штейнгауза (Ω, A, P). Здесь $\Omega=[0,1]$, σ –алгебра измеримых по Лебегу подмножеств Ω, P – линейная мера Лебега (см [5], с. 9). Класс функций (4) обозначим через $K(f,Z)$ и скажем, что некоторое свойство выполняется ***почти наверное*** в $K(f,Z)$, если лебегова мера тех $t\in[0,1]$, при которых $f(z,t)$ обладает этим свойством, равна 1.

Если $Z=R$, где R –последовательность независимых случайных величин, принимающих значения $+1$ и -1 с одинаковой вероятностью $1/2$ (последовательность Радемахера), то получим класс Радемахера $K(f,R)$. В случае $Z=H=\left\{e^{2\pi i\omega_n}\right\}$, где $\{\omega_n\}$ –последовательность независимых равномероно распределенных на $[0,1]$ случайных величин (последовательность Штейнгауза), имеем класс Штейнгауза $K(f,H)$.

Используя эти два класса, П. Эрдеш и А. Реньи [6] впервые смогли дать полный ответ на поставленный П. Леви вопрос: свойство функции $f(z)=e^z$ не является типичным для целых функций. Именно такое впечатление можно извлечь из следующей теоремы, в которой $\mathfrak{I}$ обозначает класс последовательностей Z таких, что для любой целой функции $f(z)$ при любом $\delta>0$ почти наверное в $K(f,Z)$

$$M_f(r,t)\le\mu_f(r)\ln^{1/4}\mu_f(r)\ln^{1+\delta}\ln\mu_f(r) \tag{5}$$

$$r\in(1,+\infty)\setminus E(\delta,t),\ \ln-measE(\delta,t)<+\infty, M_f(r,t)=\max\{|f(z,t)|:|z|=r\}$$

Теорема А ([6]). $R,\ H\in\mathfrak{I}$.

Заметим, что, как отмечено в [6], показатель $1/4$ в (5) заменить меньшим числом, вообще говоря, нельзя. Это следует и с более общего утверждения: для любой последовательности Z с $|Z_n|=1$ $(n\ge0)$ существует целая функция $f(z)$ такая, что при любом $\delta>0$ почти наверное в $K(f,Z)$

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M_f(r,t)}{\mu_f(r)\ln^{1/4-\delta}\mu_f(r)}=+\infty.$$

(см. [7], где это утверждение доказано в частном случае, но приведенное доказательство легко переносится и на общий случай).

В связи с этим возникает задача нахождения достаточных условий на последовательность Z, при которых $Z\in\mathfrak{I}$. Такие условия и были указаны в работе автора [8].

Определение. Последовательность X действительных случайных величин называется мультипликативной системой (MC), если $MX_{i_1}X_{i_2}...X_{i_k}=0$ для любых $i_1<i_2<...<i_k$, $k\ge1$

Теорема В ([8]). *Если X –равномерно ограниченная MC, то $X\in\mathfrak{I}$.*

Замечание. Переход к комплексным случайным величинам производится с помощью импликации: $(X,Y\in\mathfrak{I}: a,b\in C)\Rightarrow(aX+bY\in\mathfrak{I})$.

В работе [8] также получен отрицательный ответ на следующий вопрос М. Н. Шереметы: можно ли получить аналог теоремы А для последовательности независимых случайных величин, принимающих значения $+1$ и -1 соответственно с вероятностями $1/2+q$ и $1/2-q$, $0<q<1/2$. Этот факт следует из приведенной ниже теоремы С в которой через $\aleph$ обозначен класс равномерно ограниченных последовательностей X таких, что $MX_{i_1}X_{i_2}...X_{i_k}=MX_{i_1}MX_{i_2}...MX_{i_k}$ при любых $i_1<i_2<...<i_k$, $k\ge1$.

Теорема С. ([8]). *Если $X\in\aleph$, $MX_n\ge c>0\ (n\ge0)$, то почти наверное в $K(f,X)$ при $f(z)=e^z$*

$$\lim_{r\to+\infty,\, r\notin E(t)}\inf\frac{M_f(r,t)}{\mu_f(r)\ln^{1/2}\mu_f(r)}\ge c\sqrt{2\pi},$$

$$\ln-measE(t)<+\infty.$$

Теорема С определяет новый вопрос: найти условия на последовательность математических ожиданий $\{MX_n\}$, $X\in\aleph$, при которых $X\in\mathfrak{I}$. Решение этого вопроса и дано в теоремах 1 и 2, существенно обобщающих все приведенные выше результаты.

Теорема 1. Если

$$X \in \aleph,\ |MX_n| \le O\left(n^{-\alpha}\right), n \to +\infty, 0 \le \alpha \le 1/4,$$

то при любом $\delta > 0$ почти наверное в $K(f, X)$

$$M_f(r,t) \le \mu_f(r) \ln^{1/2-\alpha} \mu_f(r) \ln^{1+\delta} \ln \mu_f(r),$$
$$r \in (1, +\infty) \setminus E(\delta, t),\ \ln - measE(\delta, t) < +\infty.$$

Теорема 2. *Для любой последовательности*

$$X \in \aleph, |MX_n| \ge cn^{-\alpha}, n \ge n_0, 0 \le \alpha < 1/4$$

существует целая функция $f(z)$ *такая, что почти наверное в* $K(f, X)$

$$M_f(r,t) \ge \frac{c}{8} \mu_f(r) \ln^{1/2-\alpha} \mu_f(r),\ r \ge r_0(t).$$

Литература

1. P. C. Rosenbloom. Probability and entire functions // Studies Math. Anal. Related Topics. Stanford5 Galif. Univ. Press.–1962. P. 325–332.
2. P. Levy. Sur la croissance de fonctios entiere // Bull. Soc. Math. France7 –1930, T. 58. –A. 29–59, 127–149.
3. H. Steinhaus. Uber die Wahrscheinlichkeit dafur, dass der Konvergenzreis tiner Potenzreihe ihre naturliche Grence ist // Math. Z.–1929, Bd. 31. S. 408–416.
4. G. Polya. Untersuchungen uber Lucken und Singularitaten von Potenzreihen // Math. Z., 1929, Bd. 29. S. 549–640.
5. Ж. П. Кахан. Случайные функциональные ряды// М.: Наука, 1973, 302 с.
6. P. Erdos. A. Renyi. On random entire functions // Zastos. Mat., 1969. V. 10. P. 47–55.
7. J. M. Steele. Sharper Wiman inequality forentire functions rapidly oscillating coefficients // J. Math. Anal. Appl. ,1987. V. 123. P. 550–558.
8. П. Філевич. Випадкові цілі функції // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач// Київ: Інст. мат.,1996, 12, с. 199–208.