О ТЕОРЕМАХ ПОКРЫТИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РЕГУЛЯРНЫХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Э. Г. КИРЬЯЦКИЙ

Vilnius Technical University,
Sauletekio ave.11, Vilnius, Lithuania

Любая регулярная в единичном круге E (т.е. в круге $|z|<1$) функция может быть представлена в виде ряда Маклорена

$$\varphi(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots. \tag{1}$$

Исследование различных свойств регулярных функции через поведение ее коэффициентов разложения (1) составляет интересную, важную и весьма трудную проблему математического анализа. Проблема остается интересной и трудной, если даже ограничиться изучением свойств функций из какого –нибудь класса аналитических функций, например, взять класс однолистных в E регулярных функций, т.е. функций со свойством $\varphi(z_1)\neq\varphi(z_2)$, если $z_1\neq z_2$ и $z_1,z_2\in\mathrm{E}$ Класс таких функций относится к числу важнейших в теории регулярных функций. Обозначим его класс через $\mathrm{K}_1(\mathrm{E})$.

Если функция (1) однолистна в E, то функция $f(z)=(\varphi(z)-b_0)/b_1$ также однолистна в E. Поэтому во многих случаях целесообразно ограничиться рассмотрением однолистных в E функций, разложение которых в ряд Маклорена имеет вид

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots. \tag{2}$$

Однолистная функция вида (2) называется нормированной в E. Класс нормированных однолистных в E функций обозначим через $\tilde{\mathrm{K}}_1(\mathrm{E})$.

Серьезное изучение однолистных функций класса $\tilde{\mathrm{K}}_1(\mathrm{E})$ началось в 1907 году с утверждения П. Кебе [1], которое получило название теоремы Кебе о покрытии. Ее формулировка такова: существует абсолютная постоянная $K>0$ (постоянная Кебе) такая, что если функция $f(z)\in\tilde{\mathrm{K}}_1(\mathrm{E})$, то множество значений этой функции заполняет круг $|w|<K$, причем K – наибольшее из чисел, для которых это справедливо.

Кебе [2, 3] также установил две следующие теоремы, носящие названия теорем искажения.

1) Существуют такие положительные числа $m_1(r)$, $M_1(r)$, зависящие только от r, что для любой функции $f(z)\in\tilde{\mathrm{K}}_1(\mathrm{E})$ имеют место неравенства:

$$m_1(r)\leq|f(z)|\leq M_1(r) \qquad |z|=r$$

2). Существует число $M(r)$, зависящее только от r, что для любой функции $f(z)\in\tilde{\mathrm{K}}_1(\mathrm{E})$ и любых $|z_1|\leq r$, $|z_2|\leq r$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{M(r)}\leq\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right|\leq M(r).$$

Теоремы Кебе положили начало многочисленным исследованиям и большому числу различного рода идей. Вскоре относительно постоянных K, M_1, M_2 были получены окончательные результаты. Т. Гроноулл [6] привел исчерпывающую информацию в теоремах искажения. Л. Бибербах [4, 5], опираясь на внешнюю теорему площадей и пользуясь некоторыми результатами Г. Фабера [7, 8], установил, что $K=1/4$. Это же значение было найдено также другими авторами, например, М. А. Лаврентьевым [11], Г. М. Голузиным [9]. Тем самым проблема, возникшая в вопросе о покрытии для класса однолистных функций вида (2), была решена.

Особо отметим, что теорема об 1/4 легко следует из того установленного Л. Бибербахом факта, что $|a_2| \le 2$ в классе $\tilde{K}_1(E)$ (в начале нашей статьи было сказано о роли коэффициентов разложения функций (2) из класса $\tilde{K}_1(E)$. Л. Бибербах в 1916 г. высказал также гипотезу о том, что для коэффициентов функций из класса $\tilde{K}_1(E)$ справедливы точные оценки

$$|a_k| \le k, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Несмотря на усилия многих выдающихся математиков, проблема коэффициентов (т.е. доказательство неравенств (3) для всех натуральных k) долгое время не поддавалась решению. Только в 1986 г. неравенства (3) были доказаны американским математиком Л. де Бранжем.

Вернемся, однако, к вопросу о покрытии. Была выяснена роль условия однолистности в теореме об 1/4. Дело в том, что для аналитических в E функций вида (2) не существует круга абсолютной сходимости, который покрывался бы полностью образом круга E при отображении такой функцией. Однако, вопрос о покрытии можно ставить в различных подклассах класса регулярных функций. Решение такого рода задач было дано в работах К. Каратеодори [13], Э. Ландау [14], А. Ф. Берманта и М. А. Лаврентьева [12], Г. М. Голузина [10], И. А. Александрова [15]и многими другими авторами. Приведем некоторые из полученных тогда результатов.

1.1. Теорема 1. (К. Каратеодори).*Если функция* $w = f(z) = z^m + c_1 z^{m+1} + \ldots$, *где* m *—некоторое натуральное число, регулярна в* E *и не имеет нулей в* $0 < |z| < 1$, *то образ круга* E *при отображении этой функцией целиком покрывает круг* $|z| < 1/16$, *но не всегда больший круг с центром в начале координат.*

Теорема 2. (Г. М. Голузин). *Пусть* S_p *—класс функций вида*

$$w = f(z) = z^p (1 + a_1 z + a_2 + \ldots)$$

p *—листных и регулярных в* E. *Если функция* $w = f(z) \in S_p$, *то образ круга* E *при отображении этой функцией целиком покрывает* $|w| < 1/2^{p+1}$, *но не всегда больший.*

Теорема 3. (И. А. Александров). *Пусть* S^p *—класс однолистных регулярных в* E *функций вида*

$$w = f(z) = z + a_{p+1} z^{p+1} + a_{2p+1} z^{2p+1} + a_{3p+1} z^{3p+1} + \ldots$$

где p *—натуральное число. Если функция* $w = f(z) \in S^p$, *то образ круга* E *при отображении этой функцией целиком покрывает круг* $|w| < 1/\sqrt{4}$, *но не всегда больший.*

2.1. Обозначим через $\{F(z); z_0, \ldots, z_n\}$ разделенную разность n —го порядка регулярной в E функции $F(z)$, которую определим формулой

$$\{F(z); z_0, \ldots z_n\} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(\xi) d\xi}{(\xi - z_0) \ldots (\xi - z_n)},$$

где Γ —простой замкнутый контур, лежащий в E и охватывающий все точки $z_0, \ldots, z_n \in E$.

Далее, рассматриваем некоторые подклассы класса регулярных в E функций вида

$$F(z) = z^{n-1} f(z) = z^n + a_{2,n} z^{n+1} + a_{3,n} z^{n+2} + \ldots, \quad (n \text{ —натуральное число}). \tag{4}$$

Теорема 4. (Б. Е. Гопенгауз , E. Kirjackis). *Пусть* $\tilde{C}_n(E)$ *—класс регулярных в* E *функций вида* (4) *с условием*

$$\operatorname{Re}\left\{ \{F(z); z_0, \ldots, z_n\} \right\} > 0, \ \forall z_0, \ldots, z_n \in E.$$

Если функция $w=F(z)\in\tilde{C}_n(\mathrm{E})$, *то образ круга* E *при отображении этой функцией целиком содержит круг*

$$|w|<n2^n\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k2^k}\right).$$

Теорема 5. (Б. Е. Гопенгауз , E. Kirjackis). *Пусть* $\tilde{L}_n(\mathrm{E})$ *–класс регулярных в* E *функций вида* (4) *с условием*

$$\sum_{k=2}^{\infty}|a_{k,n}|\left|\left\{F(z);z_0,\dots,z_n\right\}\right|\le 1 \qquad \forall\, z_0,\dots,z_n\in\mathrm{E}.$$

Если функция $w=F(z)\in\tilde{L}_n(\mathrm{E})$, *то образ круга* E *при отображении этой функцией целиком покрывает круг* $|w|<n/(n+1)$, *но не всегда больший.*

Выше было сказано о том, что *если функция* $f(z)\in\tilde{\mathrm{K}}_1(\mathrm{E})$, *то образ круга* E *при отображении функцией* $w=f(z)$ *целиком покрывает круг* $|w|<1/4$, *но не всегда больший.* Справедлива

Теорема 6. (E. Kirjackis). *Пусть* $\tilde{\mathrm{K}}_n(\mathrm{E})$ *–класс регулярных в* E *функций вида* (4) *с условием* $\left\{F(z);z_0,\dots,z_n\right\}\ne 0$ *при любых попарно различных* $z_0,\dots,z_n\in\mathrm{E}$.

1. *Если функция* $F(z)=zf(z)\in\tilde{\mathrm{K}}_2(\mathrm{E})$, *то образ круга* E *при отображении функцией* $w=f(z)$ *целиком покрывает круг* $|w|<1/3$.

2. *Если регулярная в* E *функция* $f(z)$ *удовлетворяет условию* $z^{n-1}f(z)\in\tilde{\mathrm{K}}_n(\mathrm{E})$ *при любом натуральном* n, *то образ круга* E *при отображении функцией* $f(z)$ *целиком покрывает круг* $|w|<1/2$, *но не всегда больший.*

Предполагаю справедливость следующей теорема о покрытии.

Теорема 7.(ГИПОТЕЗА) *Если функция* $F(z)=z^{n-1}f(z)\in\tilde{\mathrm{K}}_n(\mathrm{E})$, *то образ круга* E *при отображении функцией* $w=f(z)$ *целиком покрывает круг*

$$|w|<\frac{n}{2(n+1)}.$$

Литература

1. K. Koebe. //Nach. Ges. Wiss. Gott., (1907), 197–210.
2. K. Koebe. //Nach. Ges. Wiss. Gott., (1909), 68–76.
3. K. Koebe. //J. F. Math., 139 (1911), 251–292.
4. L. Bieberbach.// Sitzber. Kgl. Akad. Berlin, (1916), 940–965.
5. L. Bieberbach.// Math. Ann., 77 (1916), 153–172.
6. T. H. Gronwall. //C. R. Paris, 162 (1916), 249–252.
7. G. Faber.// Munch. Ber., (1916), 39–42.
8. G. Faber.// Munch. Ber., (1920), 49–64.
9. Г. М. Голузин.// Матем. сборн., 1(43) :1 1936), 127–135.
10. Г. М. Голузин. //Матем. сборн., 22 (64) :3 (1948), 353–372.
11. М. А. Лаврентьев.// Тр. ин–та им. В. А. Стеклова, 5 (1934), 159–215.
12. А. Ф. Бермант и М. А. Лаврентьев.// Матем. сборн., 42 (84) : 4 (1935), 435–450.
13. C. Caratheodory. //C.R. Paris, 144 (1907), 1203–1206.
14. E. Landau. //Pend. Cir. Math. di Palermo, 46 (1922), 347–348.
15. И. А. Александровым. //Параметрические продолжения в теории однолистных функций, Из–во "Наука", М. 1976.
16. Б.Е. Гопенгауз. //Труды ТГУ, т. 200, № 3, с. 43–61.
17. Б. Е. Гопенгауз. //Труды ТГУ, т. 189, № 4, с. 144–160.
18. E. Kirjackis. // Многолистные функции и разделенные разности, Вильнюс "Техника", 1995.