ОБ ОДНОМ ОДНОРОДНОМ РАЗНОСТНО-СТЕПЕННОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Е. Э. КИРЬЯЦКИЙ

Vilnius Technical University,
Sauletekio ave.11, Vilnius, Lithuania

Разностные уравнения составляют важнейший класс функциональных уравнений. Они широко применяются как внутри самой математики, так и в других областях современной науки, например, в экономике, строительной механике, в теории электрических цепей и т.д.

Это, в частности, объясняется тем, что большое количество задач науки и техники связано с дискретным, скачкообразным изменением переменной.

Имеется обширная литература, посвященная разностным уравнениям как в действительной, так и в комплексной областях.

Разностным уравнением общего вида называется функциональное уравнение

$$F\left[z, f(z+\alpha_0), f(z+\alpha_1), \ldots, f(z+\alpha_p)\right]=0, \quad p\geq 0, \quad \alpha_0\neq 0. \tag{1}$$

Так как левая часть уравнения (1) может иметь настолько сложный вид, что решение его станет невозможным, то рассматривают уравнения вида (1) с более простой по конструкции левой частью.

Весьма важным в теоретическом и практическом плане частным случаем уравнения (1) является линейное однородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами вида

$$\sum_{p=0}^{l} a_p f(z+\alpha_p)=0, \quad \alpha_0\neq 0, \quad a_0 a_p\neq 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) хорошо известно в математической литературе. Ему посвящено огромное количество работ (см., например, [1], [2], [4]), в которых указываются различные методы для его решения. Рассматриваются также системы из таких уравнений [3].

Запишем разностное уравнение вида

$$\sum_{p=0}^{l} a_p f^{m_p}(z+\alpha_p)=0 \quad \alpha_0\neq 0, \quad a_0 a_p\neq 0. \tag{3}$$

где m_p —натуральные числа (показатели степеней) не все равные между собой. Такое разностное уравнение в некотором смысле обобщает уравнение (2). Оно не является линейным уравнением. Назовем уравнение (3) *однородным разностно-степенным функциональным уравнением.*

В данной заметке ограничимся лишь рассмотрением простейшего разностно−степенного уравнения вида

$$a_0 f^{m_0}(z+\alpha_0)+a_1 f^{m_1}(z+\alpha_1)=0, \quad \alpha_0\alpha_1\neq 0, \quad a_0 a_1\neq 0, \quad m_0\neq m_1,$$

которое можно заменить уравнением с меньшим количеством индексов в следующем удобном для нас виде:

$$f^m(z+\alpha)-bf^n(z)=0, \quad \alpha\neq 0, \quad b\neq 0, \quad m\neq n. \tag{4}$$

Решение уравнения (4) будем искать среди целых функций, не имеющих нулей. Имеет место

Теорема. *Для того, чтобы целая функция $f(z)$, не имеющая нулей, удовлетворяла однородному разностно-степенному функциональному уравнению (4), необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*

$$f(z)=\exp\left\{\frac{1}{m-n}(\ln b+2\pi ki)+\frac{m}{n-m}h(\alpha;\psi_\alpha)+h(z;\psi_\alpha)\right\},$$

где k - целое число, $\psi_\alpha(z)$ —целая функция с периодом α и

$$h(z;\psi_\alpha)=\int_0^z e^{\left(\frac{1}{\alpha}\ln\frac{n}{m}\right)z}\psi_\alpha(z)\,dz.$$

Предлагаем найти общее решение однородного разностно–степенного функционального уравнения вида (3) в классе целых функций, не имеющих нулей, при $l\geq 2$ (или просим сообщить о нем, если такое решение уже найдено).

Литература

1. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей // " Наука ", М., 1967, с. 290–319.
2. А. А. Миролюбов, М. А. Солдатов. Линейные однородные разностные уравнения // " Наука ", М., 1967, с. 51–105.
3. А. Г. Нафталевич. О системе двух разностных уравнений. // Исследование по современным проблемам теории функций комплексного переменного, М,: 1960, 217–225.
4. А. Ф. Леонтьев. О некоторых решениях линейного разностного уравнения с линейными коэффициентами // Матем. сб. 1958, т. 45,№ 3, с. 323–332.