О РЕШЕНИИ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОДОБЛАСТЕЙ

А. ПЕДАС

Institute of Applied Mathematics
University of Tartu
Liivi 2–206, EE2400, Nartu, Estonia

Работа частично поддерживалась Эстонским Научным Фондом (Grant 111)

Рассматривается метод подобластей для решения линейных слабо сингулярных интегральных уравнений второго рода и проблемы собственных значений для указанных уравнений. Выводятся оценки погрешности приближенного решения. Продолжены исследования работы [1].

1. Гладкость решения. Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(t)=\int_a^b K(t,s)u(s)ds+f(t),\ \ 0<t<b. \tag{1}$$

Предположим, что:

1) ядро $K(t,s)$ дважды непрерывно дифференцируемо на $\{(0,b)\times(0,b)\}\setminus\{t=s\}$ и существует такое вещественное число ν, $(-\infty<\nu<1)$, что

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)^j K(t,s)\right|\le c\begin{cases}1 & \nu+i<0\\ 1+\left|\log|t-s|\right| & \nu+i=0 \quad (i+j\le 2)\\ |t-s|^{-\nu-i} & \nu+i>0\end{cases} \tag{2}$$

где c –постоянная (имеется в виду, что оценка (2) выполняется при $t,s\in(0,b)$, $t\neq s$ для всех неотрицательных целых чисел i и j, таких что $i+j\le 2$). Буквой "c" обозначаем положительные постоянные, которые в разных неравенствах могут принимать различные значения.

2) $f\in C^{2,\nu}(0,b)$, т.е. функция $f(t)$ дважды непрерывно дифференцируема при $t\in(0,b)$ и справедливы оценки

$$\left|f^{(k)}(t)\right|\le c\begin{cases}1 & k<1-\nu\\ 1+\left|\log\rho(t)\right| & k=1-\nu \quad (k=0,1,2),\\ \rho(t)^{1-\nu-k} & k>1-\nu\end{cases} \tag{3}$$

где $\rho(t)=\min\{t,b-t\}$, $t\in(0,b)$.

Заметим, что $C^2[0,b]\subset C^{2,\nu}(0,b)$. С другой стороны, любая функция из $C^{2,\nu}(0,b)$ продолжима в непрерывную на отрезке $[0,b]$ функцию. Отметим, что ядро $K(t,s)$ может при $t=s$ иметь слабую особенность (см. (2), $i=j=0,\nu\ge 0$). При $\nu<0$ ядро $K(t,s)$ ограниченно, но тогда его производные могут при $t=s$ иметь слабую особенность. Имеет место следующий результат.

Теорема 1. [2–5] *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2). *Если уравнение* (1) *имеет решение* $u\in L^1(0,b)$, *то* $u\in C^{2,\nu}(0,b)$.

Замечание 1. В теореме 1 не предпологается однозначной разрешимости уравнения (1). В случае $f=0$ теорема 1 дает оценки для производных собственных функций интегрального оператора T, определенного формулой

$$(Tu)(t)=\int_0^b K(t,s)u(s)ds,\ 0<t<b. \tag{4}$$

2. Метод решения. Зададим сетку точек $t_j=t_j^{(n)}\ (j=0,1,\dots,n)$ отрезка $[0,b]$ такую, что

$$0=t_0<t_1<\dots<t_n=b \tag{5}$$

$$h_n\equiv\max_{1\le j\le n}(t_j-t_{j-1})\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{6}$$

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде кусочно постоянной функции

$$v_n(t)=\sum_{j=1}^n u_j\varphi_j(t),\ 0<t<b, \tag{7}$$

где $\varphi_j(t)=1$ при $t\in(t_{j-1},t_j]$ и $\varphi_j(t)=0$ при $t\notin(t_{j-1},t_j],\ j=1,\dots,n-1;\ \varphi_n(t)=1$ при $t\in(t_{n-1},t_n)$ и $\varphi_n(t)=0$ при $t\notin(t_{n-1},t_n)$. Неизвестные коэффициенты $u_1,\dots,u_n$ определим по методу подобластей из условия

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i}[v_n(t)-\int_0^b K(t,s)v_n(s)ds-f(t)]dt=0,\ i=1,\dots,n, \tag{8}$$

т.е. из системы линейных уравнений

$$u_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}u_j+f_i,\quad i=1,\dots,n, \tag{9}$$

где

$$a_{ij}=\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}K(t,s)dsdt,\qquad f_i=\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}f(t)dt. \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть* $f\in C^{2,\nu}(0,b)$ *и пусть выполнены условия* 1)–2) *и* (5)–(6). *Пусть уравнение* (1) *имеет единственное решение* $u(t)$. *Тогда система уравнений* (9) *имеет при достаточно больших* n *единственное решение* $(u_1,\dots,u_n)$. *Справедлива оценка*

$$\max_{1\le i\le n}\left|u_i-\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}u(t)dt\right|\le c\varepsilon_n^2, \tag{11}$$

где

$$\varepsilon_n=\begin{cases}h_n & \nu<0\\ h_n(1+|\log h_n|) & \nu=0\\ h_n^{1-\nu} & \nu>0\end{cases}. \tag{12}$$

Доказательство теоремы 2 основывается на теории компактной сходимости операторов в смысле Г. Вайникко [10, 11] и приведено в пункте 4. В пункте 3 приведены некоторые нужные нам вспомогательные понятия и результаты из [10].

Замечание 2. Решение u уравнения (1) в условиях теоремы 2 негладко: $u\in C^{2,\nu}(0,b)$. Поэтому добиться высокого порядка точности приближенных методов для решения уравнения (1) в условиях теоремы 2 довольно сложно. Из теоремы 2 вытекает, что метод подобластей (8) с кусочно–постоянными функциями (7) на произвольной (вообще говоря–без сгущений) сетке (5)–(6) по точности не уступает методам типа механических квадратур или сплайновой коллокации (см., например, [2, 4 6–9]). Отметим, что при построении сплайн–коллокационных методов оценки оптимального порядка точности достижимы за счет специального сгущения точек сетки около возможных сингулярностей решения (см., например, [2, 4, 9].

Вспомогательные результаты. Напомним некоторые понятия и результаты из [10, с. 11–15]. Пусть E и E_n ($n=1,2,\ldots$) банаховы пространства и $L(E,E_n)$ пространство линейных непрерывных операторов из E в E_n (определенных на всем E_n). Пусть дана система $P=\{p_n\}$ линейных непрерывных операторов $p_n \in L(E,E_n)$ (связывающие операторы) таких, что

$$\|p_n u\|_{E_n} \to \|u\|_E \quad \text{при } n\to\infty \text{ для } \forall u\in E. \tag{13}$$

P –сходимость $u_n \to u$ $(u_n\in E_n,\ u\in E,\ n\to\infty)$ означает, что $\|u_n-p_n u\|_{E_n}$, $n\to\infty$; система $\{u_n\}$ $(u_n\in E_n,\ n=1,2,\ldots)$ P–компактна, если любая последовательность $\{u_{n_k}\}$, $k=1,2,\ldots$, содержит P –сходящуюся подпоследовательность.

Определение 1. Последовательность вполне непрерывных операторов $T_n\in L(E_n,E_n)$ компактно апроксимирует вполне непрерывный оператор $T\in L(E,E)$ (или T_n компактно сходится к T), если выполнены следующие условия:

$$\|T_n\|\le c \quad (n=1,2,\ldots), \qquad \|p_n Tu - T_n p_n u\|_{E_n}\to 0 \quad \text{при } n\to\infty \text{ для } \forall u\in E',$$

где $E'\subset E$ –некоторое плотное в E подмножество;

$$u_n\in E_n,\ \|u_n\|_{E_n}\le 1 \Rightarrow \{T_n u_n\} \quad P \text{ –компактна.} \tag{14}$$

Теорема 3. [10, 11]. *Пусть последовательность вполне непрерывных операторов $T_n\in L(E_n,E_n)$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T\in L(E,E)$ по отношению связывающих операторов $p_n\in L(E,E_n)$. Пусть $f\in E$ и уравнение $u=Tu$ имеет лишь нулевое решение. Тогда уравнение*

$$u=Tu+f \tag{15}$$

имеет единственное решение u, а уравнение $u_n=T_n u_n+p_n f$ имеет при достаточно больших n единственное решение $u_n\in E_n$, причем $u_n \xrightarrow{P} u$ с оценкой

$$c_1\|p_n Tu - T_n p_n u\|_{E_n} \le \|u_n - p_n u\|_{E_n} \le c_2\|p_n Tu - T_n p_n u\|_{E_n},$$

где c_1 и c_2 –некоторые независящие от n положительные постоянные.

4. Доказательство теоремы 2. Интегральное уравнение (1) рассмотрим как операторное уравнение (15) в банаховом пространстве $E=BC(0,b)$ непрерывных ограниченных на $(0,b)$ функций $u(t)$ с нормой

$$\|u\|_{BC(0,b)}=\sup_{0<t<b}|u(t)|=\|u\|_{L^\infty(0,b)}.$$

Из 1) вытекает, что линейный оператор T, определенный формулой (4), вполне непрерывен как оператор из E в E (ср. [9]). Систему (9) рассмотрим как операторное уравнение $\bar{u}_n=T_n\bar{u}_n+p_n f$ в банаховом пространстве $E_n=m_n$ векторов вида $\bar{u}_n=(u_1,\ldots,u_n)$ с нормой $\|\bar{u}_n\|_{m_n}=\max_{1\le i\le n}|u_i|$. Здесь T_n –линейные непрерывные операторы из E_n в E_n, задаваемые формулами

$$T_n\bar{u}_n=\big((T_n\bar{u}_n)_1,\ldots,(T_n\bar{u}_n)_n\big),\quad \bar{u}_n=(u_1,\ldots,u_n)\in E_n,$$

$$(T_n\bar{u}_n)_i=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}K(t,s)\,ds\,dt\right)u_j,\quad i=1,\ldots,n, \tag{16}$$

а p_n –линейные непрерывные операторы из E в E_n, задаваемые формулами

$$p_n u=\big((p_n u)_1,\ldots,(p_n u)_n\big),\ u\in E,$$

$$(p_n u)_i = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} u(t)dt, \quad i=1,..n. \tag{17}$$

Очевидно, что $\|p_n\|_{E_n} \to \|u\|_E$ при $n\to\infty$ для каждого $u\in E$, т.е. $P=\{p_n\}$ –связывающие операторы. Из условия 1) следует равномерная ограниченноесть операторов (16):

$$\|T_n\|_{E_n \to E_n} = \sup_{\|\bar{u}_n\|_{E_n}\le 1} \max_{1\le i\le n} |(T_n \bar{u}_n)_i| \le c \quad (n=1,2,...). \tag{18}$$

Несложно непосредственно доказать, что

$$\|T_n p_n u - p_n T u\|_{E_n} \to 0 \quad \text{при } n\to\infty \quad \forall u\in E. \tag{19}$$

Мы здесь проще получаем это соотношение косвенно, учитывая (18), плотность $C^{2,\nu}(0,b)$ в E и неравенство

$$\|T_n p_n - p_n T u\|_{E_n} \le c\varepsilon_n^2 \quad \left(u\in C^{2,\nu}(0,b)\right), \tag{20}$$

доказываемое несколько позже (ε_n определена в (12)).

Покажем, что операторы $T_n : E_n \to E_n$ обладают свойством " коллективной " компактности (14). Действительно, пусть дана последовательность $\bar{u}_n = (u_1,...u_n)\in E$ с $\|\bar{u}_n\|_{E_n}\le 1$, $n=1,2,...$. Положим (см. (7))

$$v^n(t) = (Tv_n)(t) = \int\limits_0^b K(t,s) v_n(s)ds, \quad n=1,2,....$$

Легко убедиться, что $p_n v^n = T_n \bar{u}_n$. Так как оператор $T: E\to E$ вполне непрерывен, то система функций $\{v^n\}\subset E$ относительно компактна. Следовательно, последовательность $\{T_n u_n\}$ P – компактна, и (14) имеет место. Соотношения (18),(20) и (14) по определению 1 означают, что последовательность операторов T_n компактно сходится к оператору T. По предположению уравнение (1) (уравнение (15)) имеет в E единственное решение u (которое по теореме 1 принадлежит $C^{2,\nu}(0,b)$). Из теоремы 3 теперь следует, что уравнение $\bar{u}_n = T_n \bar{u}_n + p_n f$ (система уравнений (9)) имеет при достаточно больших n единственное решение $\bar{u}_n = (u_1,...,u_n \in E)$, причем $\|\bar{u}_n - p_n u\|_{E_n} \to 0$ при $n\to\infty$ с оценкой $\|\bar{u}_n - p_n u\|_{E_n} \le c\|T_n p_n u - p_n T u\|_{E_n}$. С учетом (20) это и есть оценка (11).

Итак, для завершения доказательства теоремы 2 остается установить оценку (20). Ввведем следующие обозначения (см. (5)–(6), n –достаточно большое, $i=1,...,n$):

$$s_i = \left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right), \qquad \tilde{u}_i = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} u(t)dt,$$

$$J(i) = \{j : 1\le j\le n, |t_{j-1} - s_i| \le h_n \text{ или } |t_j - s_i| \le h_n\},$$

$$J = \left\{j : 1\le j\le n,\ t_{j-1}\le h_n,\ b - t_j \le h_n\right\},$$

$$\gamma_i(h_n) = (0,b)\cap(s_i - h_n, s_i + h_n),$$

$$\eta_i(h_n) = (0,b)\setminus\left\{\gamma_i(h_n)\cup(0,h_n)\cup(b-h_n,b)\right\}$$

Пусть $u\in C^{2,\nu}(0,b)$. Мы имеем

$\|p_n T u - T_n p_n u\|_{E_n} =$

$$=\max_{1\le i\le n}\left|\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\int_0^b K(t,s)u(s)\right)dt-\sum_{j-1}^{n}\left(\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}K(t,s)dsdt\right)\bar{u}_j\right|=$$

$$=\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j-1}^{n}\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}K(t,s)\left[u(s)-\tilde{u}_j\right]dsdt\right|\le I_n^{(1)}+I_n^{(2)}+I_n^{(3)}+I_n^{(4)}, \qquad (21)$$

где

$$I_n^{(1)}=\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j\in J(i)}\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}K(t,s)\left[u(s)-\tilde{u}_j\right]dsdt\right|,$$

$$I_n^{(2)}=\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j\in J}\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}K(t,s)\left[u(s)-\tilde{u}_j\right]dsdt\right|,$$

$$I_n^{(3)}=\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j\notin J(i),\ j\notin J}\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[K(t,s)-K(t,s_j)\right]\left[u(s)-\tilde{u}_j\right]dsdt\right|,$$

$$I_n^{(4)}=\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j\notin J(i),\ j\notin J}\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}K(t,s_j)\left[u(s)-\tilde{u}_j\right]dsdt\right|,$$

Так как $u\in C^{2,\nu}(0,b)$, то

$$\sup_{t_{j-1}<s<t_j}\left|u(s)-\tilde{u}_j\right|\le$$

$$\le\sup_{t_{j-1}<s<t_j}\left\{\left|\int_{s_j}^{s}\left|u'(t)\right|dt\right|+\frac{1}{t_j-t_{j-1}}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left|\int_t^{s_j}\left|u'(\tau)\right|d\tau\right|dt\right\}\le c\varepsilon_n, \qquad j=1,\dots,n. \qquad (22)$$

Из (2) вытекают неравенства

$$\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{\gamma_i(2h_n)}\left|K(t,s)\right|dsdt\le c\varepsilon_n, \quad i=1,\dots,n. \qquad (23)$$

Поэтому

$$I_n^{(1)}\le c\varepsilon_n\max_{1\le i\le n}\sum_{j\in J(i)}\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left|K(t,s)\right|dsdt\le c\varepsilon_n\max_{1\le i\le n}\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{\gamma_i(2h_n)}\left|K(t,s)\right|dsdt\le c\varepsilon_n^2.$$

При помощи (22) и (23) получаем также, что $I_n^{(2)}\le c\varepsilon_n^2$. Оценим $I_n^{(3)}$. Имеем

$$I_n^{(3)}\le c\varepsilon_n\max_{1\le i\le n}\sum_{j\notin J(i),\ j\notin J}\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left|K(t,s)-K(t,s_j)\right|dsdt\le$$

$$\le c\varepsilon_n h_n\max_{1\le i\le n}\sum_{j\notin J(i),\ j\notin J}\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\sup_{0<\theta<1}\left|\frac{\partial K(t,\theta s+(1-\theta)s_j)}{\partial s}\right|dsdt.$$

Заметим, что для $j\notin J(i)$, $s\in\left[t_{j-1},t_j\right]$, $t\in\left[t_{i-1},t_i\right]$, $\theta\in[0,1]$ имеем

$$0<c_1\le\frac{\left|t-\left[\theta s+(1-\theta)s_j\right]\right|}{|t-s|}\le c_2,$$

где c_1 и c_2 –некоторые постоянные. Поэтому

$$I_n^{(3)}\le c\varepsilon_n h_n\max_{1\le i\le n}\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\int\limits_{\eta_i(h_n)}\begin{Bmatrix}1, & \nu+1<0\\ 1+\left|\log|t-s|\right|, & \nu+1=0\\ |t-s|^{-(\nu+1)}, & \nu+1>0\end{Bmatrix}dsdt\le c\varepsilon_n^2.$$

Оценим $I_n^{(4)}$. Так как $u(s)-\tilde{u}_j=u(s_j)-\tilde{u}_j+u(s)-u(s_j)$ и

$$\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}(s-s_j)ds=0,\quad j=1,...,n,$$

то для $j\notin J(i),\ j\notin J$ имеем

$$I_n^{(4)}\le\max_{j\notin J(i),\ j\notin J}\sum_{j\notin J(i),j\notin J}\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\int\limits_{t_j}^{t_j}\left|K(t,s_j)\right|\left|u(s_j)-\tilde{u}_j\right|dsdt+$$

$$+\max_{1\le i\le n}\sum_{j\notin J(i),\ j\notin J}\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\left|K(t,s_j)\right|\sup_{0<\theta<1}\left|u''(\theta s+(1-\theta)s_j)\right|(s-s_j)^2dsdt.$$

В силу $u\in C^{2,\nu}(0,b)$ и (2) отсюда получаем оценку $I_n^{(4)}\le c\varepsilon_n^2$. Итак, $I_n^{(k)}\le c\varepsilon_n^2,\ k=1,...,4$. Оценка (20) теперь вытекает из (21). Теорема 2 доказана.

5. Проблема собственных значений. Рассмотрим уравнение

$$\lambda u(t)=\int\limits_a^b K(t,s)u(s)ds,\quad \lambda=const,\quad 0<t<b. \tag{24}$$

Аппроксимирующую конечномерную задачу для (24) построим в виде (ср. (9), $f=0$)

$$\lambda u_i=\sum_{j=1}^n\left[\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}K(t,s)dsdt\right]u_j,\quad i=1,...,n, \tag{25}$$

где

$$u_i\approx\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}u(s)ds,\quad i=1,...,n.$$

Уравнение (24) рассмотрим как операторное уравнение $\lambda u=Tu$ в пространстве $E=BC(0,b)$ непрерывных ограниченных на $(0,b)$ функций с нормой $\|u\|_E=\sup\limits_{0<t<b}|u(t)|$ и систему уравнений (25), как операторное уравнение $\lambda\bar{u}_n=T_n\bar{u}_n$ в пространстве $E_n=m_n$ векторов вида $\bar{u}_n=(u_1,...,u_n)$ с нормой $\|\bar{u}_n\|_{E_n}=\max\limits_{1\le i\le n}|u_i|$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1) *и* (5)–(6). *Тогда для каждого ненулевого собственного значения* λ_0 *уравнения* (24) *найдется последовательность* $\{\lambda_n\}$ *собственных значений систем уравнений* (25) *такая, что* $\lambda_n\to\lambda_0$ *при* $n\to\infty$. *Обратно, каждая ненулевая предельная точка любой последовательности* $\{\lambda_n\}$ *собственных значений систем уравнений* (25) *является собственным значением уравнения* (24).

Доказательство. В условиях теоремы 4 последовательность операторов $T_n \in L(E_n, E_n)$ компактно сходится к оператору $T \in L(E,E)$ при $n \to \infty$ (см. доказательство теоремы 2). Поэтому утверждения теоремы 4 следуют непосредственно из общей теории о сходимости собственных значений (см. [10] с. 69; [11]).

Следуя [4], введем обозначения для собственного подпространства

$$V = V(\lambda_0, T) = N(\lambda_0 I - T) = \{u \in E : (\lambda_0 I - T)u = 0\}$$

и корневого подпространтства ()

$$W = W(\lambda_0, T) = N\left((\lambda_0 I - T)^l\right).$$

Здесь I –тождественно отображение, а l –ранг собственного значения λ_0, т.е. наименьшее натуральное число, для которого

$$N\left((\lambda_0 I - T)^l\right) = N\left((\lambda_0 I - T)^{l+1}\right).$$

Пусть $\delta > 0$ –такое число, что в круге $|\lambda - \lambda_0| \le \delta$ нет других собственных значений уравнения (24), кроме λ_0. Из теоремы 4 следует, что при достаточно больших n в этот круг попадает хотя бы одно собственное значение задачи (25). Пусть $\lambda_n^{(i)}$ $(i = 1, \dots, k_n)$ – попарно различные собственные значения задачи (25). попавшие в указанный круг,

$$l_n^{(i)} = \dim W\left(\lambda_n^{(i)}, T_n\right)$$

–их корневые кратности. Обозначим

$$\hat{\lambda}_n = \left[\sum_i l_n^{(i)} \lambda_n^{(i)}\right] \cdot \left[\sum_i l_n^{(i)}\right]^{-1}$$

–это среднее арифметическое чисел $\lambda_n^{(i)}$ с учетом их корневых кратностей. Линейную оболочку корневых подпространств $W\left(\lambda_n^{(i)}, T_n\right)$, $i = 1, \dots, k_n$ обозначим через $W_n = W(\lambda_0, T_n, \delta)$. Наконец, собственное подпространство матрицы T_n для $\lambda = \lambda_n^{(i)}$ обозначим через V_n :

$$V_n = V\left(\lambda_n^{(i)}, T_n\right) = N\left(\lambda_n^{(i)} I_n - T_n\right) = \left\{\overline{u}_n \in E_n : \left(\lambda_n^{(i)} I_n - T_n\right)\overline{u}_n = 0\right\},$$

где I_n –тождественное отображение в E_n.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* 1) *и* (5)–(6). *Пусть* $\lambda_n \to \lambda_0 \ne 0$, *где* λ_0 *и* λ_n – *собственные значения уравнения* (24) *и систем уравнений* (25) *соответственно, причем* λ_0 *имеет ранг* l. *Пусть, наконец,* $\delta > 0$ *–такое число, что в круге* $|\lambda - \lambda_0| \le \delta$ *нет других собственных значений уравнения* (24), *кроме* λ . *Тогда справедливы следующие оценки:*

$$|\lambda_n - \lambda_0| \le c\varepsilon_n^{2/l}, \quad \left|\hat{\lambda}_n - \lambda_0\right| \le c\varepsilon_n^2,$$

$$\sup_{\overline{u}_n \in V_n,\ \|\overline{u}\|_{E_n} = 1} \inf_{u \in V} \max_{1 \le i \le n} \left| u_i - \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t)\,dt \right| \le c\varepsilon_n^{2/l},$$

$$\sup_{\overline{u}_n \in W_n,\ \|\overline{u}\|_{E_n} = 1} \inf_{u \in W} \max_{1 \le i \le n} \left| u_i - \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t)\,dt \right| \le c\varepsilon_n^2,$$

$$\sup_{u\in W,\,\|u\|_{E_n}=1}\ \inf_{\bar{u}_n\in W_n}\ \max_{1\le i\le n}\left|u_i-\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}u(t)dt\right|\le c\varepsilon_n^2,$$

где ε_n *—определенная в* (12) *величина.*

Доказательство. Опираясь на теорему 1 (см. также замечание), индукцией по k заключаем, что

$$N\left((\lambda_0 I-T)^k\right)\subset C^{2,\nu}(0,b),\quad k=1,2,...,$$

и значит $W(\lambda_0,T)\subset C^{2,\nu}(0,b)$ $(\lambda_0\ne 0)$. При доказательстве теоремы 2 мы установили, что в условиях теоремы 5 последовательность операторов $T_n\in L(E_n,E_n)$ компактно сходится к оператору $T\in L(E,E)$ и имеет место оценка (20). Поэтому утверждения теоремы 5 вытекают непосредственно из общей теории проблемы собственных значений (см. [10], с. 69—91; [11]).

Литература

1. А. Педас. Решение слабо—сингулярных интегральных уравнений методом подобластей// Дифференц. уравнения, 1994, Т. 30, № 9, 1626—1634.
2. G. Vainikko. Multidimensional Weakly Singular Integral Equations// Lecture Notes in Mathematics, Springer—Verlag, 1993, Vol. 1549, 1—158.
3. G. Vainikko, A. Pedas. The properties of solutions of weakly singular integral equations. J. Austral Math. Soc. (Ser. B), 1981, Vol. 22, 419—430.
4. Г. Вайникко, А. Педас, П. Уба. Методы решения слабо—сингулярных интегральных уравнений//Тарту, Тартуск. ун—т, 1984.
5. Г. М. Вайникко. О гладкости решения многомерных слабо сингулярных интегральных уравнений. //Матем. сборник, 1989, Т. 180, № 12, 1709—1723.
6. А. Педас. О решении слабо—сингулярных уравнений методом механических квадратур с формулой трапеций//Уч. зап. Тартуск. ун—та, 1987, вып. 762, 89—97.
7. G. Vainikko, A. Pedas. Convergence rate of a modified cubature formula method for multidimensional weakly singular integral equations// Acta et comment. Universitas Tartuensis, 1990, № 913, 3—17.
8. М. Марквард, А. Педас. Об одной возможности для решения слабо— сингулярных интегральных уравнений// Дифференц. уравнения, 1995, Т. 31, № 9, 1557—1562.
9. Г. М. Вайникко. Некоторые коллокационные методы решения многомерных слабо—сингулярных интегральных уравнений// Numerical Analysis and Mathematical Modelling, Banach Center Publications, PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1990, Vol. 24, 91—105.
10. Г. М. Вайникко. Анализ дискретизационных методов. Тарту, Тартуск. ун—т, 1976.
11. G. Vainikko. Funktionalanalysis der Diskretisirungsmethoden// Teubner, Leipzig, 1976.